Title	不変測度ノ存在ニ就テ（II）
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 255 p.376-p.390
Issue Date	1943-07-05
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75067
rights	
Note	

1134. 不変測度ノ存在ニ就テ（II）

河田　敬義（文理大）

（I）ニ於ケル定理1ヲ必ズシモ ergodisch デナイ場合ニ（但シ $\mu(X)=1$）トシテ証明スル。$\mu(E)=0$ ナラバ $\mu(\sigma E)=0$ デアルカラ $\mathbb{N}=\{E;\ E\in\mathbb{F},\ \mu(E)=0\}$ ニヨッテ $\mathfrak{L}=\mathbb{F}/\mathbb{N}$ ヲ作ッテ、Boolsche Algebra ノ問題ニ直スト次ノ様ニナル。

今 $\mathfrak{L}$ ヲ σ-vollständige Boolsche Algebra トシ，μ ヲ $\mu(1)=1$，且ツ $a>0$ ナラ $\mu(a)>0$ トナル。$\mathfrak{L}$ 上デ定義サレタ vollständig additiv ナ Mass トスル。

又 $\mathfrak{G}=\{\sigma\}$ ナル $\mathfrak{L}$ ノ Automorphismengruppe

ガ與ヘラレテヰルモノトスル：

$a \in \mathfrak{L}$ ニ對シテ $a^\sigma \in \mathfrak{L}$ ガ一義ニ對應シテ

(1) $1^\sigma = 1, \quad 0^\sigma = 0$

(2) $(1-a)^\sigma = 1 - a^\sigma$

(3) $\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right)^\sigma = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n^\sigma.$

定義 1 $a \sim b$ (Zerlegungsgleich) トハ

$a = \sum_n a_n, \quad b = \sum b_n, \quad a_n = b_n^{\sigma_n}$ トナルコトヲイフ。

(今後 $a_1 + a_2$ トハ $a_1 \cap a_2 = 0$ ノトキニノミ $a_1 \cup a_2$ ヲ意味スルモノトスル (直和). $\sum a_n$ ハ $a_m \cap a_n = 0$ $(m \neq n)$ ノトキニノミ用ヒ, $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ ヲアラハス)

定義 2 $\mathfrak{L}$ ノ上デ定義サレタ invariantes Mass m トハ

(4) $m(1) = 1, \quad m(a) > 0$ für $a > 0$

(5) $m(a) = m(a^\sigma)$

定理 1 invariantes Mass m ノ存在スルタメノ必要十分條件ハ, 與ヘラレタ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ $\delta(\varepsilon) > 0$ ガ定マリ

(6) $\mu(a) < \delta, \quad a \sim b$ ナラバ $\mu(b) < \varepsilon$

ヲ満足スルコトデアル。

必要ハ (I) デ証明シタカラ十分ノ方ヲ証明スル。(I) ノ

結果ハ用ヒナイ。

○ Lemma 1. (i) $a \sim a$ (ii) $a \sim b \to b \sim a$

(iii) $a \sim b,\ b \sim c \to a \sim c$, (iv) $a \sim 0$ ナラ $a = 0$

$\boxed{\text{定義2}}$ $a \succ b$ トハ $a > a^* \sim b$ ナル a^* ノ存在スルコト。コレハ $a \sim b^* > b$ ノ存在スルコトト言ッテモ同ジデアル。

○ Lemma 2. $a \succ b,\ b \succ c \to a \succ c$

○ Lemma 3. $a \geqq a_n,\ a_1 \sim a_2 \sim \cdots\cdots,\ a_i \wedge a_j = 0$ $(i \neq j)$ ナラ $a_1 = a_2 = \cdots\cdots = 0$.

(証) $a_1 > 0$ ナラ $\mu(a_1) > \varepsilon > 0$ ∴ (6) カラ $\mu(a_n) > \delta$ トナリ $\mu(a) < \infty$ ニ反ス。

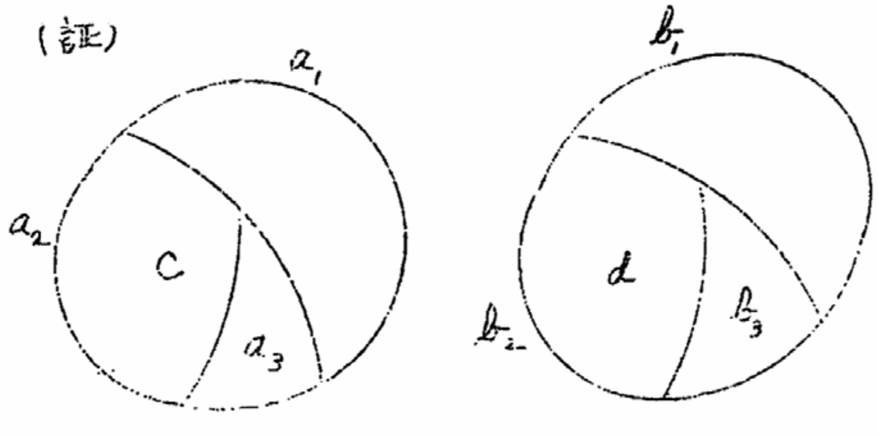
○ Lemma 4. $a \sim b,\ a \succ b,\ a \prec b$ ノ二者ガ同時ニ成立ツコトハナイ。

(証) (I) 参照.

○ Lemma 5. $a_n \sim b_n,\ a_i \wedge a_j = b_i \wedge b_j = 0\ (i \neq j)$ $\to \sum_n a_n \sim \sum_n b_n$.

○ Lemma 6. $a_1 \sim b_1,\ a_2 \sim b_2,\ a_1 \geqq a_2,\ b_1 \geqq b_2$ ナラ $a_1 - a_2 \sim b_1 - b_2$

(証)



"Principle of exhaustion" ニヨリ $a_1 - a_2 \geqq x_1 \sim y_1 \leqq b_1 - b_2$,

$x_1 > 0$ ナル x_1 ガモトマレバヨイ。

(イ) 今 $a_1 \overset{\tau_1}{\sim} b_1$ ノ對應デ

$$a_1 - a_2 \overset{\tau_1}{\sim} d \leq b_1, \quad b_1 - b_2 \overset{\tau_1}{\sim} c \leqq a_1$$

トスルトキ, $d \frown (b_1 - b_2) = y_1 > 0$ ナラ $x_1 \overset{\tau_1}{\sim} y_1 \leq b_1 - b_2$ ハモトメル元デアル。

(ロ) $d \leqq b_2$, $c \leqq a_2$ ノ場合ハ $a_3 = a_2 - c$, $b_3 = b_2 - d$ トスレバ $a_3 \overset{\tau_1}{\sim} b_3$ トナル。即チ $a_2 \overset{\tau_2}{\sim} b_2$, $a_3 \overset{\tau_1}{\sim} b_3$, $a_2 \geqq a_3$, $b_2 \geqq b_3$ ト初メノ關係ト同ジニナル。

今 $a_2 - a_3 \geqq x_2 \sim y_2 \leqq b_2 - b_3$, $x_2 > 0$ ガアレバ $a_1 - a_2 \geqq x_1 \overset{\tau_1}{\sim} y_2 \sim x_2 \overset{\tau_1}{\sim} y_1 \leqq b_1 - b_2$ ハモトメル元ニナル。故ニ(イ)ノ議論ヲ繰返スコトが出來ル。

(ハ) ヨッテコノ方法デ $a_3\, a_4 \cdots\cdots$, $b_3, b_4, \cdots\cdots$ ト何処マデツヾケテモ $x_n > 0$ ニ出合ハナイトスレバ,

$a_1 \geq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots\cdots$, $a_1 - a_2 \overset{\tau_1}{\sim} b_2 - b_3 \overset{\tau_2}{\sim} a_3 - a_4 \sim \cdots\cdots$ トナリ (6) ノ假定カラ $\mu(a_1 - a_2) > 0$, $\mu(a_1) < \infty$ ニ矛盾スル。

○ Lemma 7. $a_1 \sim a_2 \succ b_2 \sim b_1 \longrightarrow a_1 \succ b_1$ (Lemma 1, 5, 6 ヨリ)

$\boxed{\text{定義 3}}$ $\mathfrak{Z} = \{c\,;\ c^\sigma = c \text{ für jedes } \sigma \in \mathfrak{G}\}$ トスレバ $\mathfrak{Z}$ ハ σ-vollständige Boolsche Algebra トナル。

$\boxed{\text{定義 4}}$ $\mathfrak{L} \ni a$ ニ對シテ $e(a) = \bigwedge_\alpha c_\alpha$ ($c_\alpha \in \mathfrak{Z}$, $c_\alpha \geqq a$) トオク。

$e(a) \in \mathfrak{Z}$, 且 $e(a) = \vee_\sigma a^\sigma$ デアル。

（コヽニ $\wedge_\lambda$, $\vee_\sigma$ 等可附番以上ノ $\vee$, $\wedge$ ニ對シテハ μ ヲ用ヒテ $\vee_n$, $\wedge_n$ デオキカヘルコトガ出來ル）

○ Lemma 8 (i) $e(a) = 0 \longleftrightarrow a = 0$; $e(a) \geqq a$

(ii) $e(a^\sigma) = e(a)$ (iii) $a \leqq b \longrightarrow e(a) \leqq e(b)$

(iv) $e(\vee_n a_n) = \vee_n e(a_n)$, (v) $e(\wedge_n a_n) \leqq \wedge_n e(a_n)$

(vi) $c \in \mathfrak{Z}$ ナラバ $c \wedge e(a) = e(c \wedge a)$

特ニ $c \wedge e(a) > 0 \longrightarrow c \wedge a > 0$

○ Lemma 9. (i) $a \sim b \longrightarrow c \wedge a \sim c \wedge b$, $(c \in \mathfrak{Z})$

(ii) $a \prec b \rightarrow c \wedge a \precsim c \wedge b$, $(c \in \mathfrak{Z})$

(iii) $a \sim b \rightarrow e(a) = e(b)$

(iv) $a \prec b \rightarrow e(a) = e(b)$ (v) $\mathfrak{Z} \ni c \sim a$ ナラ $c = a$

（証） (i) (ii) ハ σ ト $\sim$ ノ定義カラ, (iii) ハ Lemma 8, (ii), (iii), (iv) ヨリ, (iv) ハ (ii) ト Lemma 8 ノ (iii) カラ。

(v) $c \sim a$ カラ $c = e(a) \geqq a$, $c > a$ ハ $c \sim a$ ニ矛盾スル。

$\boxed{\text{定義5}}$ $a \ll b$ ハスベテノ $c \in \mathfrak{Z}$ ニ對シテ $c \wedge a \prec c \wedge b$ 又ハ $c \wedge a = c \wedge b = 0$ トナルコト

○ Lemma 10. (i) $a \ll b$, $c \in \mathfrak{Z} \rightarrow c \wedge a \ll c \wedge b$

(ii) $a \ll b \longrightarrow e(a) \leqq e(b)$

(iii) $a \precsim b \precsim d \longrightarrow a \ll d$. 特ニ $a \sim b \ll c \sim d \rightarrow a \ll d$

(iv) $a \ll b$ ナラバ $a \sim b^* \prec b$, $b^* \ll b$ ナル b^* ガ存在スル。

(v) $a < b,\ a \ll b \longleftrightarrow e(a) = e(a-b)$

(証) (iii) ハ Lemma 9 (i) (ii), Lemma 7 カラ,

(v) $e(a) > e(a-b)$ ナラ

$(1-e(a-b)) \frown a > 0$ トナル。逆ニ $e(a) = e(a-b)$

ナラ $a \frown c = b \frown c + (a-b) \frown c$, $(a-b) \frown c > 0$ für

$c \leqq e(a)$ (Lemma 8, (vi)) ——

$\boxed{\text{定義 6}}$ $a \perp b$ トハ $a \frown b^{\sigma} = 0$ für jedes $\sigma \in \mathfrak{g}$

○ Lemma 11. $a \perp b \longleftrightarrow e(a) \frown e(b) = 0$

○ Lemma 12. $\mathfrak{L} \ni a, b$ ニ對シテ

(イ) $1 = c_0 + c_a + c_b$, $c_0, c_a, c_b \in \mathfrak{Z}$, $c_0 \frown a \sim c_0 \frown b$, $c_a \frown a \gg c_a \frown b$, $c_b \frown a \ll c_b \frown b$ ニ一義ニ分解サレル。

(証) (イ) "Principle of exhaustion" ニヨリ

$a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $a_1 \sim b_1$, $a_2 \perp b_2$ ニ分解サレル。$c_a = e(a_2)$, $c_b = e(b_2)$ トスレバ, Lemma 11 カラ $c_a \frown c_b = 0$.

Lemma 8 (vi) カラ $c_a \frown b = c_a \frown (b_1 + b_2)$

$$= c_a \frown b_1 \sim c_a \frown a_1 \ll c_a \frown a,$$

同様ニ $c_b \frown a \ll c_b \frown b$. $c_0 = 1 - c_a - c_b$ トスレバ

$$c_0 \frown a = c_0 \frown (a_1 + a_2) = c_0 \frown a_1 \sim c_0 \frown b_1 = c_0 \frown b ——$$

(ロ) 分解ノ一義ナルコトハ $0 < c \leqq c_a$ ナラ Lemma 10, (i) カラ $c \frown a \ll c \frown b$. etc. ヨリ。

$\boxed{\text{定義 7}}$ $\mathfrak{L} \ni a$ ガ minimal トハ $a \gg b$ ナラ $b = 0$

トナルコト。

○ Lemma 13. (i) a ガ minimal, $a \succsim b$ ナラバ, b モ minimal.

(ii) a ガ minimal $\longleftrightarrow$ $a > b$ ナラ $e(a) > e(b)$

(iii) a_n ガ minimal, $e(a_m) \cap e(a_n) = 0$ $(m \neq n)$ ナラ $\sum a_n$ モ minimal.

(証) (i) Lemma 10.(iii) カラ; (ii) $\leftarrow$ a キ minimal ナラ $a > b'$, $a \gg b' > 0$ ナラ Lemma 10, (v) カラ $e(a) = e(a - b')$, $\longrightarrow$ $a > b$, $e(a) = e(b)$ ナラ Lemma 10 (v) カラ $a \gg a - b > 0$; (iii) Lemma 10,(i) ヨリ ——

$\boxed{\text{定義 8}}$ $\mathfrak{Z} \ni c$ ガ discret トハ $c = e(a)$ ナル minimal ナ a ノ存在スルコト。

○ Lemma 14. (i) $c_1 =$ discret, $c_1 \geq c_2$ ナラバ c_2 モ discret.

(ii) c_1, c_2 ガ discret ナラ $c_1 \cup c_2$ モ discret.

(iii) $c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots\cdots$, $c_n =$ discrete ナラバ $\vee_n c_n$ モ discret.

(証) (i) Lemma 10, (i) ヨリ, (ii) (i) ト Lemma 13. (iii) ヲ $c_1 \cup c_2 = c_1 + (c_2 - c_1 \cap c_2) =$ アテハメル;

(iii) $\vee_n c_n = c_1 + (c_1 - c_1 \cap c_2) + \cdots\cdots + \left(c_n - c_n \cap (c_1 \cup \cdots\cdots \cup c_{n-1})\right) + \cdots\cdots =$ (ii) ト Lemma (iii) ヲアテハメル。

$\boxed{\text{定義 9}}$ ヨッテ "Principle of exhaustion" =

ヨリ $\mathfrak{Z} \ni z =$ discret デ，且ツ任意ノ discret ナ c ハ $c \leqq z$ トナルモノガ存在スル。$z \cap a = 0$ ナラ $a \neq$ minimal デアル。

○ Lemma 15. $1 - z \geqq a$ ナラバ，$a > b^0$，$a - b^0 \sim b^0$ ナル b ガ存在スル。コノトキ明カニ $e(a) = e(b) = e(a - b)$

(証) $a \neq$ minimal カラ $a > b > 0$，$a \gg b$ トシ $a - b$ ト b ニ (7) ヲ適用スレバ

$$1 = c_0 + c_b + c_{a-b}$$

ヨッテ $b_1 = c_0 \cap b + c_{a-b} \cap b + c_a \cap (a-b)$ トオケバ $a - b_1 \gtrsim b_1$ デアル。

今 $c_0 = 0$，$c_{a-b} \cap b = 0$ トスレバ，$c_b = e(b)$ トナリ，$c_b \cap (a-b) > 0$，即チ常ニ $b_1 > 0$ トナル。$a_1 - b_1 = a_1$ カラ $a_1 \geqq b_2$，$a_1 - b_2 \gtrsim b_2 > 0$ ニトレル。

"Principle of exhaustion カラ $b^0 = \sum_n b_n$ ヲトレバシマヒニ $a - b^0 \sim b^0$ ニナル。———

$\boxed{\text{定義 10}}$ $\mathfrak{L}$ ノ元ヲ $A = A_a = \{b ; b \sim a\}$ ヲ Klasse ニ分ケルコトガ出来ル。特ニ $c \in \mathfrak{Z}$ ニ對シテハ Lemma 9, (v) カラ $A_c = c$.

(イ) $A \ni a$, $B \ni b$, $a > b$ ノトキ $A > B$ ト，

(ロ) $A \ni a$, $B \ni b$, $a \cap b = 0$ ノトキ $A + B = A_{a+b}$ ト，

(ハ) $A \ni a$, $B \ni b$, $a \geqq b$ ノトキ $A - B = A_{a-b}$ ト，

(ニ) $A \ni a$, $B \ni b$, $a \gg$ ノトキ $A \gg B$ ト定義スル。

Lemma 4, Lemma 5, Lemma 6, Lemma 10

(iii) カラ夫々代表 a, b ノトリ方ニ無関係デアル。

又 $cA_a = A_{c \cap a}$, $e(A_a) = e(a)$ モ夫々代表ノトリ方ニ無関係デアル (Lemma 8, 9).

$A+A$ ガ定義サレルトキ $2A = A+A$ トオク。nA モ同様。

○ Lemma 16. (i) $A+B$ ガ定義サレヽバ $A+B = B+A$

(即チ右辺ガ定義サレテ $=$)

(ii) $A+B$, $(A+B)+C$ ガ定義サレヽバ $(A+B)+C = A+(B+C)$

(〃 〃)

(iii) $A-B$ ガ定義サレヽバ $A = (A-B)+B$ (〃)

(iv) $A+B$ ガ定義サレヽバ $A = (A+B)-B$

(v) $A+X=B$ ガトケルノハ $A \geqq B$ ノトキ, シカモ X ハ一義ニキマル。

(vi) $A+X=B$, $X>0$ ガトケルノハ $A>B$ ノトキ

(vii) $A \leqq C$, $B \leqq D$, $C+D$ ガ定義サレヽバ $A+B$ モ定義サレテ $A+C \leqq B+D$

(viii) $A+C$, $B+C$ ガ定義サレヽバ $A \gtreqless B \leftrightarrow A+C \gtreqless B+C$

(ix) $A \geqq nB$, $n=1, 2, \cdots\cdots$ ナラ $B=0$

○ Lemma 17. A, B ガ與ヘラレルトキ

$$(8) \quad \begin{cases} e(A) = \overline{C}_0 + \overline{C}_1 + \cdots\cdots, \quad c_i \in \mathfrak{Z} \\ \overline{c}_n B = n(\overline{c}_n A) + B_n, \quad B_n \ll A \end{cases}$$

ト分割サレル。而モ一義ニ $\overline{C}_n$ ハキマル。

(証)　(イ)　$A = A_a$, $B = B_b$, a, b ニ (7) ヲ適用スレバ

$1 = c_0 + c_a + c_b$, $c_0 A = c_0 B$, $c_a A \gg c_a B$, $c_b A \ll c_b B$.

先ヅ $\bar{c}_0 = e(A) \frown c_a$ トオク。次ニ $a_1 = c_b \frown a$,

$b_1 = c_b \frown b$, $a_1' \sim a_1 \ll b_1 = a_1$ ヲトレバ (Lemma 10, (iv))

a_1 ト $b_1 - a_1$ ニ (7) ヲアテハメテ

$$1 = c_0' + c_{a_1}' + c_{b_1 - a_1}', \quad c_0' \frown a_1 \sim c_0'(b_1 - a_1), \cdots\cdots$$

コノデ $\bar{c}_1 = e(A) \frown c_0 + e(A) \frown c_{a_1}'$ トオク。以下同様ニ $\bar{c}_n$ ヲ定義出来ル。

$e(A) - \sum_n c_n = c_\infty$ トスレバ，上ノ作リ方カラ

$n(c_\infty A) \leqq c_\infty B$ トナリ，Lemma 16, (ix) カラ $c_\infty A = 0$

シカルニ $c_\infty \leqq e(A)$ ヨリ Lemma 8, (vi) カラ $c_\infty = 0$

(ロ)　カゝル分割ノ一義ナルコトハ Lemma 16 ヨリ ——

○ Lemma 18. $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots$, $\bigwedge_n b_n = 0$ ナラバ，

$B_n = A_{b_n}$ ノアル A ニ對スル分割 (8) ヲ

$$e(A) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} + \cdots\cdots, \quad e^{(n)} = c_1^{(n)} + c_2^{(n)} + \cdots\cdots$$

トスレバ，$\bigwedge_n e^{(n)} = 0$ トナル。

(証)　$\bigwedge_n e^{(n)} = c \in \mathfrak{Z}$ トスレバ，$c B_n \geqq c A$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ トナル。今 $A = A_a$, $\mu(c \frown a) > \varepsilon > 0$ トスレバ

$b_n \geqq b_n^* \sim c \frown a$ カラ，假定 (6) ニヨリ $\mu(b_n) > \delta$ トナル。

コレハ $\bigwedge_n b_n = 0$ ニ反スル。∴ $c \frown a$ ヨッテ $c \leqq e(A_a)$ カラ $c = 0$ トナル。——

サテ定義9ノ $z \in \mathfrak{Z}$ ニ對シテ $z = e(a)$ ナル minimal ナ元 a ヲトリ 1, A_a ニ對スル (8) ノ分解ヲ

$$(9) \quad \begin{cases} z = z_1 + z_2 + \cdots\cdots, & z_n \in \mathfrak{Z}, \\ z_n = n\,(z_n A), & n = 1, 2, \cdots\cdots \end{cases}$$

トスル。((8) デハ $z_n = n(z_n A) + A_n$, $A_n \ll z_n A$ デアルガ, $z_n \frown a$ モ Lemma 13, (i) カラ minimal, 從ッテ $A_n = 0$ トナルノデアル。)

今 $z_n \geqq b$ ニ對シテ $B = A_b$ トA ニ對シテ (8) ヲアテハメレバ

$$(10) \quad \begin{cases} z_n = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 + \cdots\cdots + \bar{c}_n \\ \quad \bar{c}_r B = r\,(\bar{c}_r A), \quad r = 1, \cdots\cdots, n \end{cases}$$

トナル。コノトキ

$$(11) \quad m_n(b) = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n} \mu(\bar{c}_r)$$

トオケバ

(i) $b > 0$ ナラバ $m_n(b) > 0$

(ii) $b_1 \sim b_2$ ナラバ $m_n(b_1) = m_n(b_2)$

(iii) $b_1 \frown b_2 = 0$ ナラバ,

$$m_n(b_1 + b_2) = m_n(b_1) + m_n(b_2)$$

(iv) $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots$, $\bigwedge_n b_n = 0$ ナラバ

$$\lim_{r} m_n(b_r) = 0$$

(証) (iv) 丈スル。Lemma 18 カラ $e^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i^{(r)}$ トスレ

バ $e^{(1)} \geqq e^{(2)} \geqq \cdots\cdots \wedge_r e^{(r)} = 0$ デアル。 即チ
$\lim \mu(e^{(r)}) = 0$ トナル。故ニ (11) カラ

$$m_n(b^r) \leqq n\mu(e^{(r)}) \longrightarrow 0 \text{ トナル。}$$ ――

今度ハ $1 - z \geqq b$ ニ對シテ *invariantes Mass* $m_0(b)$ ヲ定義スル。

Lemma 15 カラ

$$1 = 2A_1 = 4A_2 = \cdots\cdots = 2^n A_n = \cdots\cdots, (A_n = A_{a_n})$$
$= \{a_n\}$ ガトレル。 $(e(A_n) = 1 - z)$

$B = A_b$ ト A_n ニ對スル (8) ノ分割ヲ

(12) $\quad 1 - z = C_0^{(n)} + C_1^{(n)} + \cdots\cdots + C_{2^n}^{(n)}$ トシ

(13) $\quad f_n(b) = f_n(B) = \sum_{r=1}^{2^n} \frac{r}{2^n} \mu(C_r^{(n)})$

(イ) $m_0(b) = \lim_{n \to \infty} f_n(b)$ ガ存在スル。

(證) (13) ハ一般ニ

$$1 - z = \sum_1^N C_i, \quad C_i B = r_i(C_i A_n) + B_i, \quad B_i \ll C_i A$$

デアレバ $\quad f_n(b) = \sum_i \frac{r_i}{2^n} \mu(C_i)$ ヲ滿足スル。

今，n ト $n+s$ ニ對スル (12) ノ分割ヲ合セテ細分スレバ

$$\left[\ 1 - z = \sum_1^N C_i \right.$$

$$\begin{cases} c_i B = r_i^{(n)}(c_i A_n) + B_i^{(n)}, & B_i^{(n)} \ll c_i A_n \\ c_i B = r_i^{(n+s)}(c_i A_{n+s}) + B_i^{(n+s)}, & B_i^{(n+s)} \ll c_i A_{n+s} \end{cases}$$

一方 $c_i A_n = 2^s (c_i A_{n+s})$ カラ

$$2^s r_i^{(n)} \leqq r_i^{(n+s)} \leqq 2^s (r_i^{(n)} + 1)$$

即チ $\dfrac{r_i^{(n)}}{2^n} \leqq \dfrac{r_i^{(n+s)}}{2^{n+s}} \leqq \dfrac{r_i^{(n)}+1}{2^n}$ トナリ (13) カラ

$$(14) \quad f_n(b) \leqq f_{n+s}(b) \leqq f_n(b) + \frac{1}{2^n} \quad (s=1,2,\cdots\cdots)$$

トナル。 $\therefore$ $\lim f_n(b)$ が存在スル。——

(ロ) $b > 0$ ナラ $m(b) > 0$

(証) (14) カラ，アル n ニ対シテ $f_n(b) > 0$ ヲイヘバヨイ。若シスベテノ n デ $f_n(b) = 0$

即チ $C_0^{(n)} = 1$, $B \ll A_n$ $(n = 1, \cdots\cdots)$ ナラ

$2^n B \ll 2^n A_n = 1$, $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ トナリ

Lemma 16, (ix) ナラ $B = 0$，即チ $b = 0$ デナケレバナラナイ。

(ハ) $b_1 \cap b_2 = 0$ ナラバ

$$m_0(b_1 + b_2) = m_0(b_1) + m_0(b_2)$$

(証) $B_1 = A_{b_1}$, $B_2 = A_{b_2}$, $B_3 = A_{b_1 + b_2}$ ニ對スル (12) ノ分割ヲ合セテ

$$\begin{cases} 1 - z = \sum_1^N c_i, & c_i \in \mathfrak{z} \\ c_i B_j = r_i^{(j)}(c_i A_n) + B_{ij}, & B_{ij} \ll c_i A_n, \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

トスレバ

$$c_i(B_1+B_2)=(r_i^{(1)}+r_i^{(2)})(c_iA_n)+B_{i1}+B_{i2},$$

$B_{i1}+B_{i2}\ll 2(c_iA_n)$ カラ

$$r_i^{(1)}+r_i^{(2)}\leqq r_i^{(3)}\leqq r_i^{(1)}+r_i^{(2)}+1$$

トナリ

$$f_n(b_1)+f_n(b_2)\leqq f_n(b_1+b_2)\leqq f_n(b_1)+f_n(b_2)+\frac{1}{2^n}$$

ヲ満足スル。 $\therefore$ $n\to\infty$ トスレバ, モトムル等式ヲ得ル。

(二) $b_1\geqq b_2\geqq\cdots\cdots$, $\wedge_n b_n=0$ ナラバ,

$\lim m_0(b_n)=0$

(証) 先ヅ $\lim \mu(a_n)=0$ ヲ見ル。ソレハ $\mu(a_n)>\varepsilon>0$ ナラバ $(n=1,2,\cdots\cdots)$

假定(6)カラ $1=2^n A_n$, $1=\mu(1)\geqq 2^n\cdot\delta$ トナリ、$n\to\infty$ トシテ矛盾ヲ生ズルカラデアル。

今 $m_0(b_n)>2^{\varepsilon}>0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ トスレバ,

假定ニヨリ $\delta(\varepsilon)$ ヲエラビ

$$\mu(a_r)<\delta$$

ニトル。

次ニ Lemma 18 カラ, コノ A_r ニ対スル $B_n=A_{b_n}$ ノ (12) ノ分割カラ

$$\begin{cases}1-Z=C_0^{(n)}+\cdots\cdots+C_{2^n}^{(n)},\ C_i^{(n)}B_n=i(C_i^{(n)}A_r)+B_{n,i},\ B_{ni}\ll C_i^{(n)}A_r\\ e^{(n)}=\sum_{i=1}^{2^n}C_i^{(n)}\end{cases}$$

トスレバ，$\lim \mu(e^{(n)})=0$デアッタ。$\therefore \mu(e^{(n)})<\varepsilon$トスレバ假定(6)カラ$\mu(a_r)<\delta$，$B_{n,0}=A_{c_0^{(n)}\frown b} \ll c_0^{(n)}A_r \leqq A_{a_r}$ヨリ$\mu(c_0^{(n)}\frown b)<\varepsilon$トナル故，(14)カラ

$$m_0(b_n)\leqq f_r(b_n)+\frac{1}{2^r}\leqq \mu(c_0^{(n)}\frown b)+\mu(e^{(n)})$$

$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\quad \text{矛盾!}$$

以上デ

$$m(b)=\sum_{n=0}^{\infty} m_n(b)$$

ガモトムル invariantes Mass ナルコトガ証明サレタ。

以上ノ証明カラ次ノコトガワカル。

$\boxed{\text{定理2}}$ 假定(6)ノ下ニ，任意ニ$\mathfrak{Z}$ノ上ノ Mass $\bar{\mu}(c)$ヲ與ヘルトキ

$$(15)\quad \begin{cases} m(c)=\bar{\mu}(c), & c\in\mathfrak{Z} \\ m(b^\sigma)=m(b) \end{cases}$$

ヲ満足スル$\mathfrak{B}$上ノ Mass mガ存在スル。シカモ(15)ニヨリmハ一義ニ決定サレル。

$\boxed{\text{系}}$ (4)，(5)ヲ満足スル invariantes Mass mガ只一ツナレタメノ必要且十分ナル條件ハ$\mathfrak{G}$ニ関シテ ergodic，即チ

$$c^\sigma=c \quad \text{für jedes } \sigma\in\mathfrak{G}$$

トナルcハ$c=0$，又ハ1トナルコトデアル。（18.5.18）